# Über die Existenz der Schwingerschen Funktionale in der Quantenmechanik

H. Sohr

Mathematisches Institut und Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen

(Z. Naturforsch. **25 a**, 804—815 [1970]; eingegangen am 10. März 1970)

In der Feldtheorie bedient man sich in zunehmendem Maße des Funktionalkalküls. Beispiele dafür sind die $S$-Matrix-Theorie und die Theorie der Schwingerschen Funktionale. Meist wird dieser Formalismus nur formal benutzt, ohne Konvergenzuntersuchungen. In dieser Arbeit soll die Konvergenz und damit die Existenz der Schwingerschen Funktionale als unendliche zeitgeordnete Operatorprodukte für eine Klasse von Systemen der Quantenmechanik bewiesen werden. Solche Systeme, z. B. der anharmonische Oszillator, werden in der Feldtheorie häufig für Modelluntersuchungen verwendet.

## 1. Einführung

Bei der Formulierung der Quantenfeldtheorie bedient man sich häufig der Schwingerschen Funktionale [1–9]. Diese haben die Form

$$\mathfrak{T}(j) = T \exp i \int A(x)\, j(x)\, \mathrm{d}x \tag{1.1}$$

mit $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, Schwingers „äußeren Quellen" $j$ und der Zeitordnung $T$. Als Test- und Modellfall für die allgemeine Theorie werden häufig Systeme der Quantenmechanik betrachtet [5, 10–12], vor allem in [6, 13–17]. Funktionale dieser Gestalt treten auch in der $S$-Matrixtheorie auf [6, 18–20].

Der Aufbau dieser Theorie erfolgt in der Literatur fast durchweg formal, d. h. ohne Konvergenzuntersuchungen. Wir wollen in dieser Arbeit die Konvergenz (im Sinne der starken Topologie) des unendlichen Operatorproduktes 1.1 (Feynman-Produkt [10]) und damit die Existenz des Schwingerschen Funktionals im Fall der quantenmechanischen Modelltheorien nachweisen ($p$-$q$-Fall der mehrzeitigen Theorie). Darunter fällt insbesondere der anharmonische Oszillator mit dem Hamilton-Operator $p^2 + q^4$. Das Schwingersche Funktional hat in diesen Fällen die Form

$$\mathfrak{T}(j_1, j_2) = T \exp i \int (\psi_1(t)\, j_1(t) + \psi_2(t)\, j_2(t))\, \mathrm{d}t \tag{1.2}$$

mit dem Impulsoperator $\psi_1(t) = p(t)$ und dem Ortsoperator $\psi_2(t) = q(t)$. Hier sind $j_1$ und $j_2$ reellwertige Funktionen von $t$. (Im Operatorkalkül von Feynman [10] wird $T$ weggelassen.)

Nach [10], Gl. (15) genügt das von $t_0$ bis $t$ erstreckte Feynman-Produkt

$$\mathfrak{T}^{t_0,t}(j_1, j_2) := T \exp i \int_{t_0}^{t} (\psi_1(t)\, j_1(t) + \psi_2(t)\, j_2(t))\, \mathrm{d}t$$

formal der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathfrak{T}^{t_0,t}(j_1, j_2) = i(\psi_1(t)\, j_1(t) + \psi_2(t)\, j_2(t))\, \mathfrak{T}^{t_0,t}(j_1, j_2) \tag{1.3}$$

mit der Anfangsbedingung $\mathfrak{T}^{t_0 t}(j_1, j_2) = I$ (Einsoperator) für $t_0 = t$. Aus der Theorie solcher sog. Evolutionsgleichungen folgt unter bestimmten Voraussetzungen über den Operator

$$\psi_1(t)\, j_1(t) + \psi_2(t)\, j_2(t)$$

stets die eindeutige Lösbarkeit von (1.3) [21–27]. Wir

Sonderdruckanfertigungen an Dr. H. Sohr, 7400 Tübingen, Wächterstr. 67


1 J. Schwinger, Phys. Rev. **92**, 1283 [1953].
2 J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **44**, 956 [1958].
3 J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 721 [1959].
4 J. Rzewuski, Field Theory, Vol. 2, Iliffe Books, LTD, London 1969.
5 W. T. Martin u. I. Segal, Analysis in Function Spaces, M.I.T. Press, New York 1963. [K. Symanzik, Chapt.13].
6 K. Symanzik, Z. Naturforsch. **9a**, 809 [1954].
7 H. Rampacher, H. Stumpf u. F. Wagner, Fortschr. Phys. **13**, 385 [1965].
8 H. P. Dürr u. F. Wagner, Nuovo Cim. X, **46**, 223 [1966].
9 H. Stumpf, Z. Naturforsch., im Druck.
10 R. P. Feynmann, Phys. Rev. **84**, 108 [1951].
11 E. Nelson, J. Math. Phys. **5**, 332 [1964].
12 R. L. Zimmermann, J. Math. Phys. **6**, 1117 [1965].
13 D. Maison u. H. Stumpf, Z. Naturforsch. **21a**, 1829 [1966].
14 W. Schuler u. H. Stumpf, Z. Naturforsch. **22a**, 1842 [1967].
15 W. Schuler u. H. Stumpf, Z. Naturforsch. **23a**, 902 [1968].
16 H. Stumpf, Z. Naturforsch. **24a**, 1022 [1969].
17 H. Stumpf, Z. Naturforsch. **24a**, 189 [1969].
18 N. N. Bogoliubow, D. V. Shirkow, Introduction to the Theory of Quantized Fields, Intersc. Publ., New York 1959.
19 F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 [1949].
20 F. J. Dyson, Phys. Rev. **85**, 631 [1952].
21 T. Kato, J. Math. Soc. Japan **5**, 209 [1953].
22 T. Kato, Nagoya Math. J. **19**, 93 [1961].
23 T. Kato u. H. Tanabe, Osaka Math. J. **14**, 107 [1962].
24 H. Tanabe, Osaka Math. J. **11**, 121 [1959].
25 H. Tanabe, Osaka Math. J. **12**, 145 [1960].
26 O. A. Ladyzenskaja, Mat. Sb. **39**, [81] 491 [1956].
27 E. T. Paulsen, Math. Z. **90**, 286 [1965].

wollen daher von vornherein die Schwingerschen Funktionale mit Hilfe der Differentialgleichung (1.3) definieren. Zur praktischen Berechnung dieser Funktionale kann man sich dann der Lösungsmethoden von (1.3) mittels Differenzenverfahren[28] oder mittels der Methode der kleinsten Quadrate[26] bedienen. Für theoretische Untersuchungen ist die Methode der Feynman-Produkte vorteilhafter[10, 21]. Das Hauptproblem besteht stets im Prüfen der Voraussetzungen, unter denen diese Methoden anwendbar sind.

Im folgenden soll stets der Hilbert-Raum $\mathscr{H} := L^2(\boldsymbol{R})$ der auf den reellen Zahlen $\boldsymbol{R}$ im Sinne von Lebesgue quadratintegrablen Funktionen (-klassen modulo der Nullfunktionen) zugrunde liegen. Es sei $p := \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ der Differentiationsoperator und $q = x$. Der Multiplikationsoperator in $L^2(\boldsymbol{R})$ mit den Definitionsbereichen $D(p)$ bzw. $D(q)$, so daß $p$ und $q$ selbstadjungiert sind (s. [29], S. 109 u. 112). Mit dem Hamilton-Operator $H$ in $\mathscr{H}$ sei dann

$$\psi_1(0) := p, \quad \psi_2(0) := q,$$
$$\psi_1(t) := e^{iHt}\psi_1(0)\,e^{-iHt}, \quad \psi_2(t) := e^{iHt}\psi_2(0)\,e^{-iHt}.$$

## 2. Exakte Definition der Schwingerschen Funktionale

Formal erhält man aus einer Lösung

$$T\exp i\int_{t_0}^{t}(\psi_1(t)\,j_1(t) + \psi_2(t)\,j_2(t))\,\mathrm{d}t$$

von 1.3 das Schwingersche Funktional

$$T\exp i\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_1(t)\,j_1(t) + \psi_2(t)\,j_2(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

indem man den asymptotischen Limes $t \to +\infty$, $t_0 \to -\infty$ bildet. Das soll nun präzisiert werden.

*2.1. Definition.* Für alle $t \in \boldsymbol{R}$ sei ein (nicht notwendig beschränkter) Operator $A(t)$ im Hilbert-Raum $\mathscr{H}$ gegeben. Eine Operatorfunktion

$$U_A : t_0, t \to U_A(t_0, t) \quad (t_0 \leqq t)$$

heißt eine Fundamentallösung der Evolutionsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t) = A(t)\,x(t)$ in $\mathscr{H}$, wenn folgendes gilt:

a) $U_A(t_0, t)$ ist unitär für alle $t_0, t \in \boldsymbol{R}$ mit $t_0 \leqq t$.

b) $U_A(t_0, t) = I$ (Einsoperator) für $t_0 = t$.

c) Es existiert ein in $\mathscr{H}$ bezüglich der Norm dicht liegender Teilraum $\mathscr{D}$, so daß für alle $\varphi \in \mathscr{D}$ die Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,U_A(t_0, t)\,\varphi = A(t)\,U_A(t_0, t)\,\varphi$ für $t_0 \leqq t < \infty$ im Sinne der Normtopologie gilt.

*2.2. Definition.* Seien $H$, $\psi_1$, $\psi_2$ der Hamilton-Operator, der Impuls- und Ortsoperator in $\mathscr{H}$, seien $j_1$, $j_2$ reellwertige Funktionen von $t \in \boldsymbol{R}$ und sei $\psi_\alpha(t) = e^{iHt}\psi_\alpha e^{-iHt}$ für $\alpha = 1, 2$ und $t \in \boldsymbol{R}$. Sei $U_{j_1, j_2} : t_0, t \to U_{j_1, j_2}(t_0, t)$ eine Fundamentallösung von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = i(\psi_1(t)\,j_1(t) + \psi_2(t)\,j_2(t))\,x(t)$$

und es existiere

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t_0\to-\infty}} U_{j_1, j_2}(t_0, t)\,\varphi$$

für alle $\varphi \in \mathscr{H}$ im Sinne der Norm, d.h. es existiere der starke Limes

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t_0\to-\infty}} U_{j_1, j_2}(t_0, t) =: U_{i_1, j_2}\,.$$

Dann heißt die Funktion

$$\mathfrak{T} : j_1, j_2 \to \mathfrak{T}(j_1, j_2) := U_{j_1, j_2}$$

ein Schwingersches Funktional.

Es soll nun unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz dieser Schwingerschen Funktionale gezeigt werden. Zu diesem Zweck transformieren wir die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = i(\psi_1(t)\,j_1(t) + \psi_2(t)\,j_2(t))\,x(t)$$

in eine einfachere Gestalt. Mit $\tilde{x}(t) := e^{-iHt}x(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) = i\,H\,e^{-iHt}\,x(t) + e^{-iHt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t)$$

und $\psi_\alpha(t) = e^{iHt}\,\psi_\alpha\,e^{-iHt}$ geht diese Differentialgleichung über in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tilde{x}(t) = i(\psi_1 j_1(t) + \psi_2 j_2(t) - H)\,\tilde{x}(t)\,. \tag{2.3}$$

Aus einer Fundamentallösung von (2.3) werden wir eine Fundamentallösung der ursprünglichen Gleichung konstruieren und dann das asymptotische Verhalten untersuchen. Die wichtigste und zugleich einschneidendste Voraussetzung für die Lösbarkeit von (2.3) bei allen in Frage kommenden Methoden

[28] R. D. Richtmeyer, K. W. Morton, Difference Methods for Initial-Value Problems, Intersc. Publ. 1967.

[21–23, 26–28, 30–33] ist die Forderung, daß der Definitionsbereich von $\psi_1 j_1(t) + \psi_2 j_2(t) - H$ unabhängig von $t$ ist. Dieser Nachweis wird unter genügend weiten Voraussetzungen in 3.1 gebracht. Die Konstruktion der Fundamentallösung von (2.3) erfolgt in Abschnitt 4 als Feynman-Produkt nach der Methode von KATO [21] unter Berücksichtigung der in diesem Fall möglichen Vereinfachungen. In Abschnitt 5 schließlich wird die Existenz des asymptotischen Limes und damit die Existenz des Schwingerschen Funktionals gezeigt.

## 3. Hilfssätze für den Existenzbeweis der Schwingerschen Funktionale

*3.1. Satz. Voraussetzung.* Seien $V$, $j_1$ und $j_2$ reelle Funktionen, definiert auf den reellen Zahlen $\boldsymbol{R}$. Es sei $V$ stetig und es existiere ein $c > 0$, so daß $V(x) \geqq x^2$ gilt für alle $x \geqq c$ und $x \leqq -c$.

*Behauptung.* Sei $p$ der Differentiations-, $q$ der Multiplikationsoperator in $\mathscr{H} = L^2(\boldsymbol{R})$ und sei $H = (p^2 + V(q))^-$ die Abschließung von $p^2 + V(q)$. Dann sind $H$ und für alle $t \in \boldsymbol{R}$ der Operator $M^t_{j_1,j_2} := p j_1(t) + q j_2(t) - H$ selbstadjungiert und der Definitionsbereich $\mathscr{D}(M^t_{j_1,j_2})$ von $M^t_{j_1,j_2}$ ist für alle $t \in \boldsymbol{R}$ gleich dem Definitionsbereich $\mathscr{D}(H)$ von $H$.

*Beweis.* Zum Operator $p j_1(t) + q j_2(t) - H$ gehört (im Sinne von [34] II, S. 1278) der formale Differentialausdruck

$$\tau_1(t) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - i j_2(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - V(x) + j_1(t)\, x\,.$$

Außer diesem betrachten wir im folgenden noch die Differentialausdrücke

$$\tau_2(t) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - V(x) + j_1(t)\, x + \frac{1}{4} j_2^2(t)\,,$$

$$\tau_3(t) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - V(x) + \frac{1}{4} j_2^2(t)$$

und

$$\tau_4(t) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - V(x)\,.$$

Sei $\mathscr{D}^0_\nu$ die Menge aller $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ mit kompaktem Träger, so daß $f'$ absolut stetig ist und $f'' \in L^2(\boldsymbol{R})$ gilt und sei $\mathscr{D}^1_\nu(t)$ die Menge aller $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, so daß $f'$ absolut stetig auf jedem kompakten Teilintervall von $\boldsymbol{R}$ ist und $\tau_\nu(t) f \in L^2(\boldsymbol{R})$ gilt ($\nu = 1, 2, 3, 4$; $t \in \boldsymbol{R}$). Sei $T^0_\nu(t)$ der Operator, der durch

$$T^0_\nu(t) f := \tau_\nu(t) f$$

für alle $f \in \mathscr{D}^0_\nu(t)$ und $T^1_\nu(t)$ der Operator, der durch $T^1_\nu(t) f := \tau_\nu(t) f$ für alle $f \in \mathscr{D}^1_\nu(t)$ definiert ist. Es ist $\tau_\nu(t)$ regulär (im Sinne von [34], II, S. 1280) und formal selbstadjungiert (im Sinne von [34], II, S. 1287). Nach [34], II, S. 1294, Th. 10 gilt dann

$$T^0_\nu(t)^* = T^1_\nu(t) \quad (\nu = 1, 2, 3, 4;\ t \in \boldsymbol{R})\,.$$

Für $\nu = 4$ hängen diese Größen nicht von $t$ ab; wir schreiben kurz

$$\tau_4(t) = \tau_4, \quad T^0_4(t) = T^0_4\,, \quad T^1_4(t) = T^1_4\,,$$

$$\mathscr{D}^0_4(t) = \mathscr{D}^0_4 \quad \text{und} \quad \mathscr{D}^1_4(t) = \mathscr{D}^1_4\,.$$

Nach [35], S. 169, Satz 6 oder [34], S. 1406, Cor. 15 sind unter Verwendung der Voraussetzungen über $V$ die Operatoren $T^0_3(t)$ und $T^0_4$ wesentlich selbstadjungiert. Ihre Abschließungen sind daher selbstadjungiert und $= T^1_3(t)$ bzw. $= T^1_4$. Auf $\mathscr{D}^0_4$ gilt offensichtlich $\tau_4 f = (-p^2 - V(q)) f$; daher ist $T^1_4$ auch die Abschließung des Operators $-p^2 - V(q)$ und es gilt $H = (p^2 + V(q))^- = -T^1_4$, $\mathscr{D}(H) = \mathscr{D}^1_4$. $H$ ist also selbstadjungiert auf $\mathscr{D}(H)$. Wir zeigen zunächst, daß $\mathscr{D}^1_1(t) \subseteqq \mathscr{D}^1_4$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$ gilt. [Das bedeutet unmittelbar auch $\mathscr{D}(M^t_{j_1,j_2}) \subseteqq \mathscr{D}(H)$.] Zu diesem Zweck sei $g \in \mathscr{D}^1_1(t)$ beliebig gegeben. Wir beweisen zuerst $g \in \mathscr{D}^1_2(t)$, dann $g \in \mathscr{D}^1_3(t)$ und $g \in \mathscr{D}^1_4$. Für $\tilde{g} \in L^2(\boldsymbol{R})$ mit $\tilde{g}(x) := (\exp(-[i/2]\, j_2(t)\, x))\, g(x)$ erhält man:

$$\begin{aligned}(\tau_2(t)\,\tilde{g})(x) &= \tilde{g}''(x) - V(x)\,\tilde{g}(x) + j_1(t)\, x\,\tilde{g}(x) + \tfrac{1}{4} j_2^2(t)\,\tilde{g}(x)\\ &= -\tfrac{1}{4} j_2^2(t)\left(\exp - \frac{i}{2} j_2(t)\, x\right) g(x) - i j_2(t)\left(\exp\left(-\frac{i}{2} j_2(t)\, x\right)\right) g'(x) + \left(\exp\left(-\frac{i}{2} j_2(t)\, x\right)\right) g''(x)\\ &\quad + \left(-V(x) + \tfrac{1}{4} j_2^2(t) + j_1(t)\, x\right)\left(\exp\left(-\frac{i}{2} j_2(t)\, x\right)\right) g(x) = \left(\exp\left(-\frac{i}{2} j_2(t)\, x\right)\right)(\tau_1(t)\, g)(x)\,.\end{aligned}$$


[29] N. I. ACHIESER, I. M. GLASMANN, Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, Akademie-Verlag, Berlin 1965.
[30] R. S. PHILLIPS, Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 199 [1954].
[31] K. YOSIDA, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, **9**, Part 5, 397 [1969].
[32] H. TANABE, Osaka Math. J. **11**, 121 [1959].
[33] K. YOSIDA, Functional Analysis (XIV, 4), Springer-Verlag, Berlin 1965.
[34] N. DUNFORD u. J. T. SCHWARZ, Linear Operators, I und II, Intersc. Publ. 1966.

Wegen $\left|\exp\left(-\frac{i}{2}j_2(t)\,x\right)\right| = 1$ und $g \in \mathscr{D}_1^1(t)$ erhält man daraus, daß $\tau_2(t)\,\tilde{g} \in L^2(\boldsymbol{R})$ gilt. Hieraus folgt $\tilde{g} \in \mathscr{D}_2^1(t)$. Nach Voraussetzung ist $V(x) \geqq x^2$ für $x \geqq c$ und $x \leqq -c$; daher ist $V(x) - j_1(t)\,x$ und damit auch $V(x) - j_1(t)\,x - \frac{1}{4}j_2^2(t)$ nach unten beschränkt für festes $t \in \boldsymbol{R}$. Für ein geeignetes $M(t) \in \boldsymbol{R}$ gilt daher

$$\tilde{V}(x,t) := V(x) - j_1(t)\,x - \tfrac{1}{4}j_2^2(t) + M(t) \geqq 0$$

für alle $x \in \boldsymbol{R}$. Aus $\tilde{g} \in \mathscr{D}_2^1(t)$ folgt

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \tilde{V}(x,t)\,\tilde{g}\right) \in L^2(\boldsymbol{R}).$$

Unter Verwendung der Stetigkeit von $\tilde{V}(x,t)$ bezüglich $x$ erhält man aus [35], S. 82, Satz 3 oder [34], S. 1545, D. 7, daß $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,\tilde{g} = \tilde{g}' \in L^2(\boldsymbol{R})$ gilt. Aus

$$\int |g'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int \left|\left(-\frac{i}{2}j_2(t)\,g(x) + g'(x)\right) \cdot \exp\left(-\frac{i}{2}j_2(t)\,x\right)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty$$

und

$$\int \left|-\frac{i}{2}j_2(t)\,g(x)\exp\left(-\frac{i}{2}j_2(t)\,x\right)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty$$

(wegen $g \in L^2(\boldsymbol{R})$ und $\left|\exp\left(-\frac{i}{2}j_2(t)\,x\right)\right| = 1$) folgt $\int |g'(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$, also $g' \in L^2(\boldsymbol{R})$. Aus $\tau_1(t)\,g \in L^2(\boldsymbol{R})$ und $g' \in L^2(\boldsymbol{R})$ folgt $\left(\tau_1(t) + i\,j_2(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) g \in L^2(\boldsymbol{R})$ und daraus wegen $g \in L^2(\boldsymbol{R})$ auch

$$(\tau_1(t) + i\,j_2(t) + \tfrac{1}{4}j_2^2(t))\,g = \tau_2(t)\,g \in L^2(\boldsymbol{R}).$$

Damit ist $g \in \mathscr{D}_2^1(t)$ nachgewiesen.

Um nun $g \in \mathscr{D}_3^1(t)$ nachzuweisen, sei $\tilde{V}(x,t)$ wie oben konstruiert. Wegen $g \in \mathscr{D}_2^1(t)$ gilt

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \tilde{V}(x,t)\right) g \in L^2(\boldsymbol{R}).$$

Mit [35], S. 83, (47) oder [34], S. 1545, D. 7 folgt daraus, daß $\int \tilde{V}(x,t)\,|g(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$ gilt. Nach Voraussetzung ist $V(x) \geqq x^2$ für $x \geqq c$ und $x \leqq -c$; damit erhält man

$$\infty > \int_c^\infty (V(x) - j_1(t)\,x)\,|g(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqq \int_c^\infty (x^2 - j_1(t)\,x)\,|g(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_c^\infty ((x - \tfrac{1}{2}j_1(t))^2 - \tfrac{1}{4}j_2^2(t))\,|g(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

und wegen

$$\int |g(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty \text{ folgt } \int_c^\infty (x - \tfrac{1}{2}j_1(t))^2\,|g(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Entsprechend erhält man

$$\int_{-\infty}^{-c} (x - \tfrac{1}{2}j_1(t))^2\,|g(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Daraus folgt $(x - \frac{1}{2}j_1(t))\,g \in L^2(\boldsymbol{R})$ und daraus wegen $g \in L^2(\boldsymbol{R})$ schließlich $x \cdot g \in L^2(\boldsymbol{R})$. Wegen $g \in \mathscr{D}_2^1(t)$ und damit $\tau_2(t)\,g \in L^2(\boldsymbol{R})$ hat man dann

$$(\tau_2(t) - j_1(t)\,x)\,g = \tau_3(t)\,g \in L^2(\boldsymbol{R}).$$

Das bedeutet $g \in \mathscr{D}_3^1(t)$. Da sich $\tau_3(t)$ und $\tau_4$ nur um die (von $t$ abhängige) Konstante $\frac{1}{4}j_2^2(t)$ unterscheiden, gilt $\mathscr{D}_3^1(t) = \mathscr{D}_4^1$; also hat man auch $g \in \mathscr{D}_4^1$, was gezeigt werden sollte. Es gilt also $\mathscr{D}_1^1(t) \subseteqq \mathscr{D}_4^1$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$.

Nun zeigen wir, daß die Umkehrung gilt, daß also $\mathscr{D}_4^1 \subseteqq \mathscr{D}_1^1(t)$ ist für alle $t \in \boldsymbol{R}$. Sei dazu $g \in \mathscr{D}_4^1$ beliebig vorgegeben. Wegen $\mathscr{D}_4^1 = \mathscr{D}_3^1(t)$ gilt dann $\tau_3(t)\,g \in L^2(\boldsymbol{R})$ und damit auch $\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right) g \in L^2(\boldsymbol{R})$.

Die Anwendung von [35], S. 82, Satz 3 und [35], S. 83, (47), oder [34], S. 1545, D 7, liefert wieder $g' \in L^2(\boldsymbol{R})$ und $x \cdot g \in L^2(\boldsymbol{R})$. Daraus folgt mit

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right) g \in L^2(\boldsymbol{R})$$

die Beziehung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - V(x) - i\,j_2(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + j_1(t)\,x\right) g = \tau_1(t)\,g \in L^2(\boldsymbol{R})$$

und damit $g \in \mathscr{D}_4^1(t)$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$. Damit ist $\mathscr{D}_4^1 \subseteqq \mathscr{D}_1^1(t)$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$ gezeigt. Da aus $g \in \mathscr{D}_4^1$ stets $g' \in L^2(\boldsymbol{R})$ und $x \cdot g \in L^2(\boldsymbol{R})$ folgt, erhält man außerdem, daß die Definitionsbereiche $\mathscr{D}(p)$ von $p$ und $\mathscr{D}(q)$ von $q$ den Bedingungen $\mathscr{D}(p) \supseteqq \mathscr{D}_4^1$ und $\mathscr{D}(q) \supseteqq \mathscr{D}_4^1$ genügen.

Es gilt also $\mathscr{D}_4^1 = \mathscr{D}_1^1(t)$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$. Wegen $\mathscr{D}(p) \supseteqq \mathscr{D}_4^1$, $\mathscr{D}(q) \supseteqq \mathscr{D}_4^1$ und $\mathscr{D}(H) = \mathscr{D}_4^1$ hat der Operator

$$M_{j_1,j_2}^t = p\,j_1(t) + q\,j_2(t) - H$$

für alle $t \in \boldsymbol{R}$ den Definitionsbereich

$$\mathscr{D}(M_{j_1,j_2}^t) = \mathscr{D}(H).$$

Wegen $\mathscr{D}_4^1 = \mathscr{D}(H) \equiv \mathscr{D}_1^1(t)$ gilt dann $T_1^1(t) = M_{j_1,j_2}^t$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$. Der Operator $M_{j_1,j_2}^t$ ist offensichtlich symmetrisch, es gilt also

$$T_1^1(t)^* = M_{j_1,j_2}^t{}^* \supseteqq M_{j_1,j_2}^t = T_1^1(t).$$

Andererseits gilt

$$T_1^1(t) = T_1^0(t)^* \supseteqq T_1^0(t)\,,$$

weil $T_1^0(t)$ ebenfalls symmetrisch ist; daraus folgt

$$T_1^1(t)^* = T_1^0(t)^{**} \subseteqq T_1^0(t)^* = T_1^1(t)\,,$$

also $T_1^1(t) \subseteqq T_1^1(t)$. Damit ist $T_1^1(t)^* = T_1^1(t)$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$ gezeigt. Es ist also $M^t_{j_1,j_2}$ $(= T_1^1(t))$ für alle $t \in \boldsymbol{R}$ selbstadjungiert mit dem Definitionsbereich

$$\mathscr{D}(M^t_{j_1,j_2}) = \mathscr{D}(H)\,.$$

Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

*3.2. Satz.* Sei $j_1, j_2, M^t_{j_1,j_2}$ und $H$ wie in 3.1. Sei $\mathscr{V}_{t,t'}(j_\alpha)$ die Variation von $j_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ im endlichen Intervall $[t, t']$. Es existiere eine Zahl $\mathscr{V}(j_1, j_2) > 0$, so daß $\mathscr{V}_{t,t'}(j_\alpha) \leqq \mathscr{V}(j_1, j_2)$ für $\alpha = 1, 2$ und alle $[t, t']$ gilt. Sei

$$\mathscr{V}_{t,t'}(j_1, j_2) := \max_{\alpha=1,2} \mathscr{V}_{t,t'}(j_\alpha)\,, \quad \mathscr{W}_{t,t'}(j_1, j_2) := \sup_{\substack{\tau,\tau' \in [t,t'] \\ \alpha=1,2}} |j_\alpha(\tau) - j_\alpha(\tau')|\,, \quad \mathscr{M}_{t,t'}(j_1, j_2) := \int_t^{t'} \max_{\alpha=1,2} |j_\alpha(\tau)| \mathrm{d}\tau$$

und $\mathscr{C}(j_1, j_2) := \sup\limits_{\tau \in \boldsymbol{R},\, \alpha=1,2} |j_\alpha(\tau)|$. Sei $\mathscr{Z} : t = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t'$ eine Zerlegung des Intervalls $[t, t']$ mit $\delta_\nu := t_\nu - t_{\nu-1}$ und $|\mathscr{Z}| := \max\limits_{\nu=1,\ldots,n} \delta_\nu$ und sei $\tilde{\mathscr{Z}} : t = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \cdots < \tilde{t}_{\tilde{n}} = t'$ eine Vergröberung von $\mathscr{Z}$ mit $\tilde{\delta}_\nu := \tilde{t}_\nu - \tilde{t}_{\nu-1}$ und $|\tilde{\mathscr{Z}}| := \max\limits_{\nu=1,\ldots,\tilde{n}} \tilde{\delta}_\nu$. Sei $I$ der Einsoperator, $\Gamma := (i\,I - H)^{-1}$, $\Gamma^t_{j_1,j_2} := (i\,I - M^t_{j_1,j_2})^{-1}$ und $\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_\nu) := \exp(i\,\delta_\nu M^{t_\nu}_{j_1,j_2})$. Dann existiert eine Zahl $\mathscr{N}(j_1, j_2) > 0$, so daß gilt:

a) $\|(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1) - \mathscr{U}^{\tilde{\mathscr{Z}}}_{j_1,j_2}(\tilde{t}_{\tilde{n}}) \cdots \mathscr{U}^{\tilde{\mathscr{Z}}}_{j_1,j_2}(\tilde{t}_1))\,\Gamma\| \leqq |\tilde{\mathscr{Z}}|\, \mathscr{V}_{t,t'}(j_1, j_2)\, \mathscr{N}(j_1, j_2)\,,$

b) $\|(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1) - \exp(i(t' - t)\, M^t_{j_1,j_2}))\,\Gamma\| \leqq (t' - t)\, \mathscr{W}_{t,t'}(j_1, j_2)\, \mathscr{N}(j_1, j_2)\,,$

c) $\|(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1) - \exp(-\,i(t' - t)\, H))\,\Gamma\| \leqq (\mathscr{M}_{t,t'}(j_1, j_2) + |\mathscr{Z}|\, \mathscr{V}_{t,t'}(j_1, j_2))\, \mathscr{N}(j_1, j_2)\,.$

*Bemerkung*: Die erste dieser Ungleichungen ist implizit in einer Abschätzung von Kato enthalten [21], S. 219 (3.11). Katos Methode können wir jedoch auch beim Beweis der übrigen Ungleichungen verwenden.

*Beweis von 3.2*: Die Existenz der Operatoren $\exp(i\,\delta_\nu M^{t_\nu}_{j_1,j_2})$ im Sinne der Theorie der einparametrigen Halbgruppen [36], S. 302 und [36], S. 231 ist wegen der Selbstadjungiertheit von $M^t_{j_1,j_2}$ für alle $j_1, j_2$, $t \in \boldsymbol{R}$ stets gesichert. Jeder Operator $\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_\nu)$ ist unitär und kann z. B. mit Hilfe der Spektraldarstellung von $M^{t_\nu}_{j_1,j_2}$ erhalten werden. Aus der Selbstadjungiertheit von $H$ und $M^{t_\nu}_{j_1,j_2}$ folgt die Existenz und die Beschränktheit von $\Gamma$ und $\Gamma^{t_\nu}_{j_1,j_2}$ und der Wertebereich dieser Operatoren ist nach 3.1 gleich dem Definitionsbereich $\mathscr{D}(H)$ von $H$. Jedes $\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_\nu)$ bildet den Definitionsbereich seines infinitesimalen Operators $M^{t_\nu}_{j_1,j_2}$ in sich ab [36], S. 308, Th. 10.3.3, oder [33], S. 239, Th. 2; alle diese Definitionsbereiche sind gleich $\mathscr{D}(H)$ nach 3.1; daher ist ein Operator der Form $\mathscr{U} = \Gamma^{-1}\, \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\, \Gamma$ überall definiert. Aus der Beschränktheit von $\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1), \ldots, \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n)$ und $\Gamma$ und der Abgeschlossenheit von $\Gamma^{-1} = (i\,I - H)$ folgt die Abgeschlossenheit von $\mathscr{U}$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen [37], S. 78 oder [33], S. 79, folgt dann die Beschränktheit von $\mathscr{U}$. Das entsprechende gilt mit $\Gamma^{t_\nu}_{j_1,j_2}$ statt $\Gamma$. Von dieser Tatsache wird im folgenden laufend Gebrauch gemacht werden.

Die linke Seite von a), b) und c) kann auf eine einheitliche Form gebracht werden, indem man folgendermaßen Funktionen $\tilde{j}_1$ und $\tilde{j}_2$ definiert:

$$\text{Fall a):}\quad \tilde{j}_\alpha(\tau) := \begin{cases} j_\alpha(\tau) & \text{für} \quad \tau \in (\tilde{t}_{\nu-1}\,,\ \tilde{t}_\nu];\ \nu = 1, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{für} \quad \tau \leqq t = t_0 \quad \text{und} \quad \tau > t' = t_n\,. \end{cases}$$

$$\text{Fall b):}\quad \tilde{j}_\alpha(\tau) := \begin{cases} j_\alpha(t) & \text{für} \quad \tau \in (t, t'] \\ 0 & \text{für} \quad \tau \leqq t \quad \text{und} \quad \tau > t'\,. \end{cases}$$

$$\text{Fall c):}\quad \tilde{j}_\alpha(\tau) := 0 \quad \text{für alle } \tau \in \boldsymbol{R} \qquad (\alpha = 1, 2)\,.$$

[35] G. Hellwig, Differentialoperatoren der math. Physik, Springer-Verlag, Berlin 1964.

[36] E. Hille, R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, Am. Math. Soc. Colloq. Publ., 1957.

[37] H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces, New York 1966.

Damit erhält man unter Ausnützung der Halbgruppeneigenschaften die Bezeichnung

$$\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_1)=\begin{cases}\mathscr{U}^{\tilde{\mathscr{Z}}}_{j_1,j_2}(\tilde t_n)\cdots\mathscr{U}^{\tilde{\mathscr{Z}}}_{j_1,j_2}(\tilde t_1) & \text{im Fall a),}\\ \exp(i(t'-t)\,M^{t}_{j_1,j_2}) & \text{im Fall b),}\\ \exp(-\,i(t'-t)\,H) & \text{im Fall c).}\end{cases}$$

In allen drei Fällen ist dann die linke Seite von a), b) und c) gleich

$$\|(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)-\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_1))\,\Gamma\|\,.$$

Wir vereinbaren für die folgende Rechnung, ein „leeres" Operatorprodukt gleich $I$ zu setzen. Es sei also z. B.

$$\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_{\varrho+1})=I \ \text{ für } \varrho=n \quad \text{und} \quad \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_{\varrho-1})\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)=I \quad \text{für } \varrho=1\,.$$

Die linke Seite von a), b) und c) kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}&\|(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)-\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_1))\,\Gamma\|\\ &\qquad=\|\sum_{\varrho=1}^{n}\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_{\varrho+1})\,(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_\varrho)-\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_\varrho))\,\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_{\varrho-1})\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,\Gamma\|\leqq\\ &\qquad\leqq\sum_{\varrho=1}^{n}\|(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde j_1,\tilde j_2}(t_\varrho)-\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_\varrho))\,\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2}\|\,\|(\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_{\varrho-1})\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,\Gamma\|\,.\end{aligned}\tag{I}$$

Zur weiteren Abschätzung beachten wir, daß $j_\alpha(t)$ gleichmäßig beschränkt ist für alle $t\in\boldsymbol{R}$ und $\alpha=1,2$ $(\mathscr{C}(j_1,j_2)<\infty)$. Daher ist der Operator $(\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma=i\,I\,\Gamma-j_1(t_\varrho)\,p\,\Gamma-j_2(t_\varrho)\,q\,\Gamma+H\,\Gamma$ gleichmäßig Norm-beschränkt für alle $\varrho$. Dann ist auch $((\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma)^{-1}=\Gamma^{-1}\,\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2}$ gleichmäßig Norm-beschränkt für alle $\varrho$. Es existiert also eine Konstante $\mathscr{K}(j_1,j_2)$, so daß $\|\Gamma^{-1}\,\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2}\|\leqq\mathscr{K}(j_1,j_2)$ für $\varrho=1,\ldots,n$ gilt. Mit $\mathscr{A}:=\|p\,\Gamma\|+\|q\,\Gamma\|$ erhält man weiter

$$\begin{aligned}&\|(\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma\|=\|((\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}+\Gamma^{-1}-\Gamma^{-1})\,\Gamma\|\\ &=\|(-p\,j_1(t_\varrho)-q\,j_2(t_\varrho)+(i\,I+H))\,\Gamma\|\leqq|j_1(t_\varrho)|\,\|p\,\Gamma\|+|j_2(t_\varrho)|\,\|q\,\Gamma\|+\|(i\,H+H)\,\Gamma\|\leqq\mathscr{C}(j_1,j_2)\,\mathscr{A}+1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=2}^{\varrho}\|(M^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}-M^{t_\nu}_{j_1,j_2})\,\Gamma\|&=\sum_{\nu=2}^{\varrho}\|p\,\Gamma(j_1(t_{\nu-1})-j_1(t_\nu))+q\,\Gamma(j_2(t_{\nu-1})-j_2(t_\nu))\|\\ &\leqq\|p\,\Gamma\|+\|q\,\Gamma\|\sum_{\nu=2}^{\varrho}(|j_1(t_{\nu-1})-j_1(t_\nu)|+|j_2(t_{\nu-1})-j_2(t_\nu)|)\leqq\mathscr{A}\,\mathscr{V}_{t,t'}(j_1,j_2)\,.\end{aligned}$$

Damit wird in (I) zunächst der rechte Faktor abgeschätzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}&\|(\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_{\varrho-1})\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,\Gamma\|=\|(\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_{\varrho-1})\,\Gamma^{t_{\varrho-1}}_{j_1,j_2}(\Gamma^{t_{\varrho-1}}_{j_1,j_2})^{-1}\cdots(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,\Gamma^{t_1}_{j_1,j_2}(\Gamma^{t_1}_{j_1,j_2})^{-1})\,\Gamma\|\\ &\quad=\|(\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma^{t_{\varrho-1}}_{j_1,j_2}(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_{\varrho-1})\,(\Gamma^{t_{\varrho-1}}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma^{t_{\varrho-2}}_{j_1,j_2})\cdots(\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_2)\,(\Gamma^{t_2}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma^{t_1}_{j_1,j_2})\,\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,(\Gamma^{t_1}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma\|\\ &\quad\leqq\|(\Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma^{t_{\varrho-1}}_{j_1,j_2}\|\,\Big(\prod_{\nu=2}^{\varrho-1}\|(\Gamma^{t_\nu}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}\|\Big)\,\|(\Gamma^{t_1}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma\|=\|(\Gamma^{t_1}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma\|\,\|\prod_{\nu=2}^{\varrho}(\Gamma^{t_\nu}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}\|\\ &\quad=\|(\Gamma^{t_1}_{j_1,j_2})^{-1}\,\Gamma\|\prod_{\nu=2}^{\varrho}\|I+(M^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}-M^{t_\nu}_{j_1,j_2})\,\Gamma^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}\|\\ &\qquad\qquad\leqq(1+\mathscr{C}(j_1,j_2)\,\mathscr{A})\prod_{\nu=2}^{\varrho}(1+\|(M^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}-M^{t_\nu}_{j_1,j_2})\,\Gamma\|\,\|\Gamma^{-1}\,\Gamma^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}\|)\\ &\quad\leqq(1+\mathscr{C}(j_1,j_2)\,\mathscr{A})\prod_{\nu=2}^{\varrho}(1+\mathscr{K}(j_1,j_2)\,\|(M^{t_\nu}_{j_1,j_2}-M^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2})\,\Gamma\|)\leqq\exp(\mathscr{A}\,\mathscr{C}(j_1,j_2))\prod_{\nu=2}^{\varrho}\\ &\qquad\qquad\cdot\exp(\mathscr{K}(j_1,j_2)\,\|(M^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}-M^{t_\nu}_{j_1,j_2})\,\Gamma\|)\\ &\quad=\exp(\mathscr{A}\,\mathscr{C}(j_1,j_2))\exp(\mathscr{K}(j_1,j_2)\sum_{\nu=2}^{\varrho}\|(M^{t_{\nu-1}}_{j_1,j_2}-M^{t_\nu}_{j_1,j_2})\,\Gamma\|\leqq\exp(\mathscr{A}\,\mathscr{C}(j_1,j_2))\exp(\mathscr{A}\,\mathscr{V}_{t,t'}(j_1,j_2)\mathscr{K}(j_1,j_2))\\ &\quad=\exp(\mathscr{A}\,\mathscr{C}(j_1,j_2)+\mathscr{A}\,\mathscr{K}(j_1,j_2)\,\mathscr{V}_{t,t'}(j_1,j_2))\leqq\exp(\mathscr{A}\,\mathscr{C}(j_1,j_2)+\mathscr{A}\,\mathscr{K}(j_1,j_2)\,\mathscr{V}(j_1,j_2))\,.\end{aligned}\tag{II}$$

Für den linken Faktor in (I) erhält man unter Verwendung von [36], S. 312, (10.4.5), oder [21], S. 212, Lemma 3:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} \| (\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde{j}_1,\tilde{j}_2}(t_\varrho) - \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_\varrho)) \Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2} \| \leqq \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \| (M^{t_\varrho}_{\tilde{j}_1,\tilde{j}_2} - M^{t_\varrho}_{j_1,j_2}) \Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2} \|$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \| (M^{t_\varrho}_{\tilde{j}_1,\tilde{j}_2} - M^{t_\varrho}_{j_1,j_2}) \Gamma \Gamma^{-1} \Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_2} \| \leqq \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \| (M^{t_\varrho}_{\tilde{j}_1,\tilde{j}_2} - M^{t_\varrho}_{j_1,j_2}) \Gamma \| \, \| \Gamma^{-1} \Gamma^{t_\varrho}_{j_1,j_1} \|$$
$$\leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \| (M^{t_\varrho}_{\tilde{j}_1,\tilde{j}_2} - M^{t_\varrho}_{j_1,j_2}) \Gamma \| = \mathscr{K}(j_1,j_2) \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \| p \Gamma (\tilde{j}_1(t_\varrho) - j_1(t_\varrho)) + q \Gamma (\tilde{j}_2(t_\varrho) - j_2(t_\varrho)) \|$$
$$\leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho (|\tilde{j}_1(t_\varrho) - j_1(t_\varrho)| + |\tilde{j}_2(t_\varrho) - j_2(t_\varrho)|) . \tag{III}$$

An dieser Stelle werden die Fälle *a*), *b*) und *c*) unterschieden. Im Fall a) wird die Summe zunächst über diejenigen $\varrho$ erstreckt, für die $t_\varrho$ im gleichen Intervall $[\tilde{t}_{\nu-1}, \tilde{t}_\nu]$ der Zerlegung $\mathscr{Z}$ liegt. Innerhalb dieser Intervalle wird $|\tilde{j}_\alpha(t_\varrho) - j_\alpha(t_\varrho)|$ durch $\mathscr{V}_{\tilde{t}_{\nu-1},\tilde{t}_\nu}(j_1,j_2)$ abgeschätzt, so daß die einzelnen Teilsummen durch $\tilde{\delta}_\nu \mathscr{V}_{\tilde{t}_{\nu-1},\tilde{t}_\nu}(j_1,j_2)$ abgeschätzt werden können. Daher ist (III) in Fall a)

$$\leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \sum_{\nu=1}^{\tilde{n}} \tilde{\delta}_\nu \mathscr{V}_{\tilde{t}_{\nu-1},\tilde{t}_\nu}(j_1,j_2) \leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \, |\tilde{\mathscr{Z}}| \sum_{\nu=1}^{\tilde{n}} \mathscr{V}_{\tilde{t}_{\nu-1},\tilde{t}_\nu}(j_1,j_2) \leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \, |\mathscr{Z}| \, \mathscr{V}_{t,t'}(j_1,j_2) .$$

Dieses Ergebnis setzen wir zusammen mit (II) in (I) ein und erhalten

$$\| (\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1) - \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde{j}_1,\tilde{j}_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{\tilde{j}_1,\tilde{j}_2}(t_1)) \Gamma \|$$
$$\leqq |\tilde{\mathscr{Z}}| \, \mathscr{V}_{t,t'}(j_1,j_2) \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \exp (\mathscr{A} \mathscr{C}(j_1,j_2) + \mathscr{A} \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{V}(j_1,j_2) .$$

Mit $$\mathscr{N}(j_1,j_2) := \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \exp (\mathscr{A} \mathscr{C}(j_1,j_2) + \mathscr{A} \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{V}(j_1,j_2))$$

ist das die gewünschte Ungleichung 3.2 a). Im Fall *b*) schätzen wir $|\tilde{j}_\alpha(t_\varrho) - j_\alpha(t_\varrho)|$ durch $\mathscr{W}_{t,t'}(j_1, j_2)$ nach oben ab. Wir erhalten:

$$\mathscr{K}(j_1,j_2) \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \| p \Gamma (\tilde{j}_1(t_\varrho) - j_1(t_\varrho)) + q \Gamma (\tilde{j}_2(t_\varrho) - j_2(t_\varrho)) \| \leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{W}_{t,t'}(j_1,j_2) \mathscr{A} \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho$$
$$= \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{W}_{t,t'}(j_1,j_2) \mathscr{A} (t' - t) .$$

Zusammen mit (II) und (I) erhalten wir damit die Ungleichung b).

Im Fall c) erhalten wir:

$$\mathscr{K}(j_1,j_2) \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \| p \Gamma (\tilde{j}_1(t_\varrho) - j_1(t_\varrho)) + q \Gamma (\tilde{j}_2(t_\varrho) - j_2(t_\varrho)) \|$$
$$\leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho (\max_{\alpha=1,2} |j_\alpha(t_\varrho)|) \leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho (\max_{\alpha=1,2} ((\inf_{\tau \in [t_{\varrho-1},t_\varrho]} |j_\alpha(\tau)|) + \mathscr{V}_{t_{\varrho-1},t_\varrho}(j_1,j_2))$$
$$\leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} (\int_t^{t'} \max_{\alpha=1,2} |j_\alpha(\tau)| \, d\tau + \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_\varrho \mathscr{V}_{t_{\varrho-1},t_\varrho}(j_1,j_2)) \leqq \mathscr{K}(j_1,j_2) \mathscr{A} (\mathscr{M}_{t,t'}(j_1,j_2) + |\mathscr{Z}| \, \mathscr{V}_{t,t'}(j_1,j_2)) .$$

Zusammen mit (II) und (I) erhalten wir damit die Ungleichung c).

Damit ist *Satz 3.2* bewiesen.

## 4. Feynman-Produkte als Fundamentallösungen

Mit Hilfe von 3.1 und 3.2 kann nun gezeigt werden, daß das Feynman-Produkt

$$T \exp i \int_{t_0}^{t} (\psi_1 j_1(\tau) + \psi_2 j_2(\tau) - H) \, d\tau$$

als starker Limes endlicher Produkte existiert und eine Fundamentallösung von 2.3 ist.

*4.1. Satz. Voraussetzung:* Seien $V$, $j_1$ und $j_2$ reelle Funktionen auf $\boldsymbol{R}$. Es sei $V$ stetig und es existiere ein $c > 0$, so daß $V(x) \geqq x^2$ für $x > c$ und $x < -c$ gilt; $j_1$ und $j_2$ seien von beschränkter Variation auf $\boldsymbol{R}$, d. h. es existiere ein $\mathscr{V}(j_1, j_2) < \infty$, so daß die Variationen von $j_1$ und $j_2$ in sämtlichen endlichen Intervallen stets $\leqq \mathscr{V}(j_1, j_2)$ sind.

*Behauptung:* Sei $\psi_1 = p$, $\psi_2 = q$ und $H = (p^2 + V(q))^-$ (wie in 3.1) im Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2(\boldsymbol{R})$ und sei $\mathscr{Z} : t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ mit $\delta_\nu := t_\nu - t_{\nu-1}$ und $|\mathscr{Z}| := \max\limits_{\nu=1,\ldots,n} \delta_\nu$ eine Zerlegung von $[t_0, t]$. Dann existiert im Sinne der starken Konvergenz der Grenzwert

$$\lim_{|\mathscr{Z}|\to 0} (\exp i(\psi_1 j_1(t_n) + \psi_2 j_2(t_n) - H)\,\delta_n) \cdots (\exp i(\psi_1 j_1(t_1) + \psi_2 j_2(t_1) - H)\,\delta_1);$$

er wird mit $T \exp i \int\limits_{t_0}^{t} (\psi_1 j_1(\tau) + \psi_2 j_2(\tau) - H)\,\mathrm{d}\tau$ bezeichnet.

*Bemerkung:* Die Voraussetzungen über $V$ umfassen den anharmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = x^4$. Die Voraussetzungen über $j_1, j_2$ sind wenig einschränkend; sie umfassen alle $j_1, j_2$ mit $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |j'_\alpha(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty$, also z. B. alle Konstanten oder alle Funktionen aus dem Raum $S$ von Schwartz.

*Beweis von 4.1:* Die Voraussetzungen von 3.1 und 3.2 sind erfüllt. In der Bezeichnung von 3.2 lautet die Beh. 4.1, daß der starke Limes $\lim\limits_{|\mathscr{Z}|\to 0} \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)$ existiert. Es seien $\mathscr{Z}^\lambda : t_0 = t_0^{(\lambda)} < t_1^{(\lambda)} < \cdots < t_{n_\lambda}^{(\lambda)} = t$ Zerlegungen von $[t_0, t]$ mit $\delta_\nu^{(\lambda)} = t_\nu^{(\lambda)} - t_{\nu-1}^{(\lambda)}$, $|\mathscr{Z}^\lambda| = \max\limits_{\nu=1,\ldots,n_\lambda} \delta_\nu^{(\lambda)}$ für $\lambda = 1, 2, 3$, so daß $\mathscr{Z}^{(3)}$ eine Verfeinerung von $\mathscr{Z}^{(1)}$ und $\mathscr{Z}^{(2)}$ ist. Dann gilt nach 3.2 a) für $\lambda = 1{,}2$ die Beziehung

$$\| (\mathscr{U}^{\mathscr{Z}^\lambda}_{j_1,j_2}(t^{(\lambda)}_{n_\lambda}) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}^\lambda}_{j_1,j_2}(t^{(\lambda)}_1) - \mathscr{U}^{\mathscr{Z}^3}_{j_1,j_2}(t^{(3)}_{n_3}) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}^3}_{j_1,j_2}(t^{(3)}_1))\,\Gamma \| \leqq |\mathscr{Z}^\lambda|\,\mathscr{V}_{t_0,t}(j_1, j_2)\,\mathscr{N}(j_1, j_2).$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\| (\mathscr{U}^{\mathscr{Z}^1}_{j_1,j_2}(t^{(1)}_{n_1}) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}^1}_{j_1,j_2}(t^{(1)}_1) - \mathscr{U}^{\mathscr{Z}^2}_{j_1,j_2}(t^{(2)}_{n_2}) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}^2}_{j_1,j_2}(t^{(2)}_1))\,\Gamma \| \leqq (|\mathscr{Z}^1| + |\mathscr{Z}^2|)\,\mathscr{V}_{t_0,t}(j_1, j_2)\,\mathscr{N}(j_1, j_2).$$

Daraus folgt nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium, daß $\lim\limits_{|\mathscr{Z}|\to 0} \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,\Gamma$ im Sinne der Operatornormkonvergenz existiert. Dieser Limes existiert dann auch im Sinne der starken Konvergenz. Daher existiert $\lim\limits_{|\mathscr{Z}|\to 0} \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,\varphi$ für alle $\varphi$ der Form $\Gamma\psi$ mit $\psi \in \mathscr{H}$; diese liegen in $\mathscr{H}$ dicht, weil der Definitionsbereich $\mathscr{D}(H)$ $(=\mathscr{D}(iI - H))$ in $\mathscr{H}$ dicht liegt. Da alle Operatoren $\mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_\nu)$ unitär sind, kann nun der Satz von Banach-Steinhaus [36], S. 41, Th. 2.11.4, oder [37], S. 85, 4.5, angewendet werden. Daraus folgt, daß $\lim\limits_{|\mathscr{Z}|\to 0} \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_1)\,\varphi$ sogar für alle $\varphi \in \mathscr{H}$ existiert. Das ist die Behauptung von 4.1.

Der Nachweis, daß $T \exp i \int\limits_{t_0}^{t} (\psi_1 j_1(\tau) + \psi_2 j_2(\tau) - H)\,\mathrm{d}\tau$ eine Fundamentallösung von 2.3 ist, erfordert zusätzlich die Stetigkeit von $j_1$ und $j_2$.

*4.2. Satz. Voraussetzung:* Zusätzlich zur Voraussetzung von 4.1 seien die Funktionen $j_1$ und $j_2$ stetig auf $\boldsymbol{R}$.

*Behauptung:* Sei $\psi_1 = p$, $\psi_2 = q$ und $H$ in $\mathscr{H}$ wie in 3.1. Dann ist die Operatorfunktion

$$t_0, t \to \tilde{\mathscr{U}}(t_0, t) := \begin{cases} T \exp i \int\limits_{t_0}^{t} (\psi_1 j_1(\tau) + \psi_2 j_2(\tau) - H)\,\mathrm{d}\tau & \text{für} \quad t_0 < t, \\ I \quad \text{für} \quad t_0 = t \end{cases}$$

eine Fundamentallösung von $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\tilde{x}(t) = i(\psi_1 j_1(t) + \psi_2 j_2(t) - H)\,\tilde{x}(t)$.

*Beweis:* Sei $t_0 \leqq t < t'$ und $\mathscr{Z}(\delta, t') : t_0 < t_1 < \cdots < t_{n'} = t'$ mit $\delta_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$ und $\delta = \max\limits_{\nu=1,\ldots,n'} \delta_\nu$ ein System von Zerlegungen von $[t_0, t']$, so daß $t$ Teilpunkt, etwa $= t_n$ ist. Sei

$$B^{\delta, t_0, t'}_{j_1,j_2} := \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t')}_{j_1,j_2}(t_{n'}) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t')}_{j_1,j_2}(t_1), \quad B^{\delta, t_0, t}_{j_1,j_2} := \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t')}_{j_1,j_2}(t_n) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t')}_{j_1,j_2}(t_1) \quad \text{für} \quad t > t_0$$

und $= I$ für $t = t_0$ und

$$B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} := \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t')}_{j_1,j_2}(t_{n'}) \cdots \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t')}_{j_1,j_2}(t_{n+1}).$$

Dann gilt nach 4.1

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} - B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}) = \frac{1}{t'-t}(\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t') - \tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t))$$

im Sinne der starken Konvergenz. Im gleichen Sinn erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} - B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}) &= \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - I)\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} = \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) \\ &\qquad + \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \\ &= \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2})\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} + \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}.\end{aligned}$$

Nach 3.2 b) gilt

$$\left\| \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}))\, \Gamma \right\| \leqq \mathscr{W}_{t,t'}(j_1,j_2)\, \mathscr{N}(j_1,j_2);$$

unmittelbar aus der Stetigkeit von $j_1$ und $j_2$ folgt $\mathscr{W}_{t,t'}(j_1, j_2) \to 0$ für $t' \to t$; der Operator $\Gamma^{-1} B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma$ ist gleichmäßig beschränkt für alle $\delta$; daraus folgt, daß

$$\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}))\, \Gamma\Gamma^{-1} B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma$$

im Sinne der Norm und daher

$$\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}))$$

im Sinne der starken Konvergenz gegen 0 konvergiert, und zwar gleichmäßig für alle $\delta$. Aus der Theorie der einparametrigen Halbgruppen (z.B. [36], S. 306, 10.3) folgt, daß

$$\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2} - I)\, \varphi = i\, M^t_{j_1,j_2} \varphi$$

gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}(M^t_{j_1,j_2})$ $(= \mathscr{D}(H))$ im Sinne der Norm in $\mathscr{H}$. Daher gilt

$$\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, \Gamma = i\, M^t_{j_1,j_2} \Gamma$$

und damit auch

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, \Gamma\Gamma^{-1} B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma &= \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma \\ &= i\, M^t_{j_1,j_2} B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma\end{aligned}$$

im Sinne der starken Konvergenz. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} - B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2})\, \Gamma &= \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}))\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma \\ &\quad + \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma = i\, M^t_{j_1,j_2} \Gamma\end{aligned}$$

im Sinne der starken Konvergenz.

Der Limes $\lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t}(B^{\delta,t,t'}_{j_1,j_2} - \exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}))\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma$ existiert wie erwähnt gleichmäßig für alle $\delta$; der Limes

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2} \Gamma = \frac{1}{t'-t}(\exp(i(t'-t)\, M^t_{j_1,j_2}) - I)\, \tilde{\mathscr{U}}(t_0,t)\, \Gamma$$

existiert gleichmäßig für alle $t'$, weil $B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}$ nicht von $t'$ abhängt. Daher gilt [34], S. 28,6, die Vertauschbarkeitsbeziehung

$$\lim_{t'\to t}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{t'-t}\left(B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}-B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}\right)\Gamma=\lim_{\delta\to 0}\lim_{t'\to t}\frac{1}{t'-t}\left(B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2}-B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}\right)\Gamma .$$

Daraus folgt

$$\lim_{t'\to t}\frac{1}{t'-t}\left(\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t')-\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\right)\Gamma=\lim_{\delta\to 0} i\,M^t_{j_1,j_2}\,B^{\delta,t_0,t}_{j_1,j_2}\,\Gamma=i\,M^t_{j_1,j_2}\,\tilde{\mathscr{U}}(t_0,t)\,\Gamma ,$$

alles im Sinne der starken Konvergenz. Entsprechend erhält man

$$\lim_{t'\to t}\frac{1}{t'-t}\left(\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t')-\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\right)=i\,M^{t'}_{j_1,j_2}\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t')\,\Gamma .$$

Das bedeutet das Bestehen der Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\Gamma=i\,M^t_{j_1,j_2}\tilde{\mathscr{U}}(t_0,t)\,\Gamma$ im Sinne der starken Topologie oder der Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\varphi=i\,M^t_{j_1,j_2}\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\varphi$ für alle $\varphi\in\mathscr{D}(H)$ bezüglich der Norm in $\mathscr{H}$. $\mathscr{D}(H)$ liegt dicht in $\mathscr{H}$; es ist somit gezeigt, daß 2.1 c) erfüllt ist. Die Bedingung 2.1 a) und b) sind ebenfalls erfüllt. Die Unitarität von $\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)$ für alle $t\geqq t_0$ folgt unmittelbar aus der Unitarität der Operatoren $\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_\nu)$ für alle $\mathscr{Z}$ und $t_\nu$. Damit ist Satz 4.2 bewiesen.

Aus der Fundamentallösung $\tilde{\mathscr{U}}^{\mathscr{Z}}_{j_1,j_2}(t_0,t)$ von 2.3 erhalten wir durch unitäre Transformation eine Fundamentallösung von 1.3.

*4.3. Satz. Voraussetzung:* Wie in 4.2.

*Behauptung:* Sei $\psi_1=p$, $\psi_2=q$ und $H$ wie in 3.1 und sei $\psi_\alpha(t)=e^{iHt}\,\psi_\alpha e^{-iHt}$ $(\alpha=1,2)$ in $\mathscr{H}=L^2(\boldsymbol{R})$. Dann ist $t_0,t\to\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t):=e^{iHt}\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,e^{-iHt_0}$ eine Fundamentallösung von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=i\left(\psi_1(t)\,j_1(t)+\psi_2(t)\,j_2(t)\right)x(t) .$$

*Bemerkung:* Mit Hilfe der Trotter-Formel [38], S. 903, 5.3, oder [39], S. 546, 2, kann gezeigt werden, daß folgendes gilt:

$$\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)=\begin{cases}T\exp i\int\limits_{t_0}^{t}\left(\psi_1(\tau)\,j_1(\tau)+\psi_2(\tau)\,j_2(\tau)\right)\mathrm{d}\tau & \text{für}\quad t_0<t ,\\ I \quad \text{für}\quad t=t_0 .\end{cases}$$

*Beweis von 4.3:* Wir betrachten die Identität

$$\frac{1}{t'-t}\left(\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t')-\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)\right)\Gamma=\frac{1}{t'-t}\left(e^{iHt'}-e^{iHt}\right)\Gamma\,\Gamma^{-1}\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t')\,e^{-iHt_0}\,\Gamma+e^{iHt}\cdot\frac{1}{t'-t}\cdot\left(\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t')-\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\right)\Gamma\,\Gamma^{-1}\,e^{-iHt_0}\,\Gamma .$$

Hierbei konvergiert im Sinne der starken Konvergenz für $t'\to t$:

$$\frac{1}{t'-t}\left(e^{iHt'}-e^{iHt}\right)\Gamma \quad\text{gegen}\quad i\,H\,e^{iHt}\,\Gamma,\ \Gamma^{-1}\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t')\,e^{-iHt_0}\,\Gamma \quad\text{gegen}\quad \Gamma^{-1}\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,e^{-iHt_0}\,\Gamma$$

(denn aus der Differenzierbarkeit von $\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)$ bezüglich $t$ folgt die Stetigkeit) und

$$\frac{1}{t'-t}\left(\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t')-\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\right)\Gamma \quad\text{gegen}\quad i\left(\psi_1\,j_1(t)+\psi_2\,j_2(t)-H\right)\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\Gamma \quad (\text{nach } 4.2) .$$

Daher ist der starke Limes von $\frac{1}{t'-t}\left(\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t')-\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)\right)\Gamma$ für $t'\to t$ gleich

$$i\,H\,e^{iHt}\,\Gamma\,\Gamma^{-1}\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,e^{-iHt_0}\,\Gamma+e^{iHt}\,i\left(\psi_1\,j_1(t)+\psi_2\,j_2(t)-H\right)\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\Gamma\,\Gamma^{-1}\,e^{-iHt_0}\,\Gamma .$$

[38] H. F. Trotter, Pac. J. Math. 8, 887 [1958].

[39] H. F. Trotter, Proc. Am. Math. Soc. **10**, 545 [1959].

Dies ist mit $i\,H\,e^{iHt}\,\Gamma = e^{iHt}\,i\,H\,\Gamma$ gleich

$$e^{iHt}\,i\,(\psi_1 j_1(t) + \psi_2 j_2(t))\,\tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,e^{-iHt_0}\,\Gamma = i\,(\psi_1(t)\,j_1(t) + \psi_2(t)\,j_2(t))\,\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\Gamma\,.$$

Für alle $\varphi$ aus dem Wertebereich von $\Gamma$, also für alle $\varphi \in \mathscr{D}(H)$ gilt somit

$$\lim_{t'\to t}(\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t') - \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t))\,\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\varphi = i\,(\psi_1(t)\,j_1(t) + \psi_2(t)\,j_2(t))\,\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\varphi\,.$$

Damit ist 2.1 c) erfüllt; 2.1 a) und b) gelten trivialerweise. Satz 4.3 ist bewiesen.

## 5. Asymptotisches Verhalten und Existenz des Schwingerschen Funktionals

Die Existenz des Schwingerschen Funktionals erfordert nach 2.2 die Existenz des asymptotischen Limes $\lim\limits_{\substack{t\to+\infty\\ t_0\to-\infty}} \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)$ im Sinne der starken Konvergenz. Hierzu ist eine Bedingung für das Verhalten von $j_\alpha(t)$ für $t\to\pm\infty$ erforderlich.

*5.1. Satz. Voraussetzung:* Zusätzlich zur Voraussetzung von 4.1 seien $j_1$ und $j_2$ stetig und es gelte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |j_1(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |j_2(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty\,.$$

*Behauptung:* Dann existiert (Bezeichnung wie in 4.1) der Limes

$$\mathscr{U}_{j_1,j_2} := \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t_0\to-\infty}} e^{iHt}\,(T\exp i\int_{t_0}^{t}(\psi_1 j_1(\tau) + \psi_2 j_2(\tau) - H)\,\mathrm{d}\tau)\,e^{-iHt_0}$$

im Sinne der starken Konvergenz, d.h. (nach 4.3) es existiert das Schwingersche Funktional

$$j_1, j_2 \to \mathfrak{T}(j_1, j_2) := \mathscr{U}_{j_1,j_2}$$

für alle der Voraussetzung genügenden $j_1, j_2$.

*Bemerkung:* Die Voraussetzungen über $j_1, j_2$ sind nicht sehr einschneidend. Sie sind z. B. erfüllt, wenn $j_1$ und $j_2$ stetig differenzierbar sind und die Bedingungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |j_\alpha(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |j_\alpha'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty \quad (\alpha = 1, 2)$$

erfüllt sind. Das ist eine weit umfangreichere Funktionenklasse als der Raum $S$. Satz 5.1 sichert z. B. die Existenz des Schwingerschen Funktionals für den anharmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = x^4$.

*Beweis von 5.1:* Es genügt aus Symmetriegründen, den Limes $t\to+\infty$ zu untersuchen. Mit

$$\Gamma = (i\,I - H)^{-1} \quad \text{und} \quad \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)$$

nach 4.2 zeigen wir zunächst, daß $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t)\,\Gamma$ im Sinne der Operatornorm existiert. Dazu genügt es nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium zu zeigen, daß (im gleichen Sinn)

$$\lim_{\substack{t',t''\to\infty\\ t''>t'}} (\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t'') - \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0,t'))\,\Gamma = 0 \text{ gilt.}$$

Sei $t_0 < t' < t''$ und $\mathscr{Z}(\delta,t''): t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t''$ mit $\delta_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$, $\delta = \max\limits_{\nu=1,\ldots,n} \delta_\nu$ ein System von Zerlegungen von $[t_0, t'']$, so daß $t'$ Teilpunkt, etwa $= t_{n'}$ ist. Wir setzen

$$B^{\delta,t',t''}_{j_1,j_2} := \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t'')}_{j_1,j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t'')}_{j_1,j_2}(t_1)\,, \quad B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} := \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t'')}_{j_1,j_2}(t_{n'})\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t'')}_{j_1,j_2}(t_1)$$

und

$$B^{\delta,t',t''}_{t_1,j_2} := \mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t'')}_{j_1,j_2}(t_n)\cdots\mathscr{U}^{\mathscr{Z}(\delta,t'')}_{j_1,j_2}(t_{n'+1})$$

und betrachten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\| (e^{iHt''} B^{\delta,t_0,t''}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0} - e^{iHt'} B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} e^{-iHt}) \Gamma\| &= \| (e^{iHt''} B^{\delta,t',t''}_{j_1,j_2} - e^{iHt'}) B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0} \Gamma\| \\ &= \| e^{iHt''} (B^{\delta,t',t''}_{j_1,j_2} - e^{-iH(t''-t')}) \Gamma \Gamma^{-1} B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} \Gamma \Gamma^{-1} e^{-iHt_0} \Gamma\| \\ &\leqq \| (B^{\delta,t',t''}_{j_1,j_2} - e^{-iH(t''-t')}) \Gamma\| \, \| \Gamma^{-1} B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} \Gamma\| \, \| \Gamma^{-1} e^{-iHt_0} \Gamma\| .\end{aligned}$$

Der zweite und der dritte Faktor des letzten Ausdruckes sind gleichmäßig für alle $\delta$, $t_0$, $t$ beschränkt. Der Faktor

$$\| (B^{\delta,t',t''}_{j_1,j_2} - e^{-iH(t''-t')}) \Gamma\|$$

ist nach 3.2 c

$$\leqq (\mathscr{M}_{t',t''}(j_1, j_2) + \delta \mathscr{V}_{t',t''}(j_1, j_2)) \mathscr{N}(j_1, j_2)$$

Wegen $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} | j_\alpha(t) | \, \mathrm{d}t < \infty \quad (\alpha = 1, 2)$ gilt $\lim\limits_{t',t''\to\infty} \mathscr{M}_{t',t''}(j_1, j_2) = 0$

und da $j_1$, $j_2$ von beschränkter Variation sind auf $\boldsymbol{R}$ (4.1), so gilt $\lim\limits_{t',t''\to\infty} \mathscr{V}_{t',t''}(j_1, j_2) = 0$, es gilt also

$$\lim_{\substack{t',t''\to\infty \\ t''>t'}} \| (B^{\delta,t',t''}_{j_1,j_2} - e^{-iH(t''-t')}) \Gamma\| = 0 .$$

Damit gilt auch

$$\lim_{\substack{t',t''\to\infty \\ t''>t'}} \| (e^{iHt''} B^{\delta,t_0,t''}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0} - e^{iHt'} B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0}) \Gamma\| = 0 .$$

Andererseits gilt nach 4.1:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} (e^{iHt''} B^{\delta,t_0,t''}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0} - e^{iHt'} B^{\delta,t_0,t''}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0}) \Gamma &= (e^{iHt''} \tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0, t'') e^{-iHt_0} - e^{iHt'} \tilde{\mathscr{U}}_{j_1,j_2}(t_0, t') e^{-iHt_0}) \Gamma \\ &= (\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0, t'') - \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0, t') \Gamma .\end{aligned}$$

Diese Konvergenz ist gleichmäßig für alle $t'$ und $t''$, denn es ist $\mathscr{V}_{t_0,t'}(j_1, j_2)$ und $\mathscr{V}_{t_0,t''}(j_1, j_2)$ in 3.2 a) stets $\leqq \mathscr{V}(j_1, j_2)$ und diese Zahl (4.1) ist unabhängig von $t'$ und $t''$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t',t''\to\infty \\ t''>t'}} (\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0, t'') - \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0, t') ) \Gamma &= \lim_{\substack{t',t''\to\infty \\ t''>t'}} \lim_{\delta\to 0} (e^{iHt''} B^{\delta,t_0,t''}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0} - e^{iHt'} B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0}) \Gamma \\ &= \lim_{\delta\to 0} \lim_{\substack{t',t''\to\infty \\ t''>t'}} (e^{iHt''} B^{\delta,t_0,t''}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0} - e^{iHt'} B^{\delta,t_0,t'}_{j_1,j_2} e^{-iHt_0}) \Gamma = \lim_{\delta\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

im Sinne der Operatorkonvergenz. Hieraus folgt die Existenz von $\lim\limits_{t\to\infty} \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0, t) \Gamma$ im gleichen Sinn. Da der Wertebereich von $\Gamma$ gleich $\mathscr{D}(H)$ ist und damit in $\mathscr{H}$ dicht liegt und $\mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0, t)$ stets unitär ist, kann wieder mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus ([36], S. 41, 2.11.4) geschlossen werden, daß $\lim\limits_{t\to\infty} \mathscr{U}_{j_1,j_2}(t_0, t)$ im Sinne der starken Konvergenz existiert. Damit ist Satz 5.1 bewiesen.

Herrn Prof. Stumpf vom Institut für Theoretische Physik in Tübingen möchte ich sehr herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für zahlreiche nützliche Diskussionen danken.